數學傳播 44卷4期, pp. 87-94

透過現象揭示本質—兼談銳角三角形的「邊垂三角形」面積之比與「趙國瑞三角形」

趙國瑞

一、未雨綢繆 寫在前言

爲了敘述方便, 本文先作如下定義:

如圖 1, 設 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 連結 AH、BH、CH, 這樣我們得到 $\triangle ABH$、$\triangle BCH$ 和 $\triangle CAH$。注意到這三個三角形都與 $\triangle ABC$ 共邊, 另兩邊是非共邊上的高的一部分, 我們把這樣的三角形叫做銳角 $\triangle ABC$ 的「邊垂三角形」。顯然任意一個銳角三角形有且只有三個「邊垂三角形」。

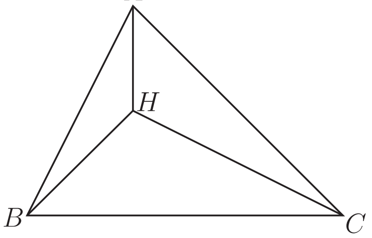

圖1

《數學傳播》第 42 卷 1 期發表了連威翔先生的文章《一道面積比公式的另證》, 文中談到了銳角三角形的「邊垂三角形」面積比公式:

設 H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 則

$$\begin{aligned}&\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH\\&\quad=(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4):(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4):(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4)。\qquad(*)\end{aligned}$$

原作者不僅用另外的方法重新證明了公式 $(*)$, 還解答了一道與銳角三角形的「邊垂三角形」面積比有關的數學問題。筆者通過細心研讀, 發現公式 $(*)$ 的簡捷證明以及原例題的簡捷解答。現將原例題的解答過程和公式 $(*)$ 的證明過程分享給大家, 以期開闊讀者視野。

二、另闢蹊徑 重解例題

原文中的例題如下:

如圖 2, 設 H 為銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 且 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=1:2:3$, 求 $\triangle ABC$ 三邊長的比例值, 即 $a:b:c=$?

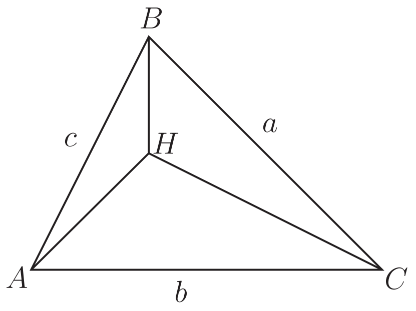

圖2

連威翔先生在求解的過程中主要運用了畢達哥拉斯定理, 筆者將採用三角函數巧解。

為了便於充分利用垂心這個條件, 分別作出 $\triangle ABC$ 的三邊上的高 AD, BE, CF, 如圖 3 所示。

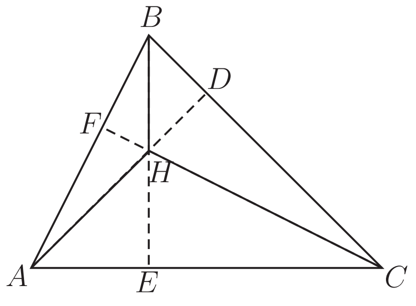

圖3

由 $\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{\triangle AEB}{\triangle CEB}=\dfrac{\triangle AEH}{\triangle CEH}=\dfrac{\triangle AEB-\triangle AEH}{\triangle CEB-\triangle CEH}=\dfrac{\triangle ABH}{\triangle BCH}=\dfrac{1}{2}$, 設 $AE=p, CE=2p$。

同理, $\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{1}{3}$。

設 $AF=3q$, $BF=2q$, $BD=r$, $CD=3r$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中, $\cos B=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{r}{5q}$。

(注: 為了便於發現規律, 本文中的三角函數, 都是指 $\triangle ABC$ 的內角的三角函數, 如 $\cos B$表示 $\cos\angle ABC$)。

在 Rt$\triangle CBF$ 中, $\cos B=\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{2q}{4r}=\dfrac{q}{2r}$。

$\therefore\ \dfrac{r}{5q}=\dfrac{q}{2r}$, 即 $\dfrac{r}{q}=\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2}$。$\therefore\ \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{5q}{4r}=\dfrac{5\sqrt2}{4\sqrt5}=\dfrac{\sqrt5}{\sqrt8}$。

同理 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sqrt5}{3}$。

$\therefore\ AB:BC:AC=\sqrt5:\sqrt8:3$, 即 $a:b:c=\sqrt8:3:\sqrt5$。

三、別出心裁 簡證公式

原文對公式 $(*)$ 的證明過程比較複雜, 本文將直接從面積比入手, 根據「兩個等底 (同底) 三角形面積之比等於它們的高之比」, 並結合三角函數、正弦定理和餘弦定理給出一種比較簡捷的證明方法。

根據「等底 (同底) 的兩個三角形面積之比等於它們的高之比」, 易證 $\dfrac{\triangle ABH}{\triangle BCH}=\dfrac{AE}{CE}$。

如圖 2, 在 Rt$\triangle AEH$ 中, $AE=EH\cot(90^\circ-C)=EH\tan C$。

在 Rt$\triangle CEH$ 中, $CE=EH\cot(90^\circ-A)=EH\tan A$。

$$\therefore\ \frac{AE}{CE}=\frac{\tan C}{\tan A},\quad \text{即}\ \frac{\triangle ABH}{\triangle BCH}=\frac{\tan C}{\tan A}。$$

同理 $\dfrac{\triangle ABH}{\triangle CAH}=\dfrac{\tan C}{\tan B}$。$\therefore\ \triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=\tan C:\tan A:\tan B$。

而 $\tan C=\dfrac{\sin C}{\cos C}$。

由正弦定理, 得 $c=2R\sin C$ (其中 R 表示 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑)。

由餘弦定理, 得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$。

$$\therefore\ \tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\dfrac{c}{2R}}{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=\frac{abc}{(a^2+b^2-c^2)R}\ 。$$

同理 $\tan A=\dfrac{abc}{(b^2+c^2-a^2)R}$, $\tan B=\dfrac{abc}{(c^2+a^2-b^2)R}$。

$$\begin{aligned}\therefore\ \tan C:\tan A:\tan B&=\frac{abc}{(a^2+b^2-c^2)R}:\frac{abc}{(b^2+c^2-a^2)R}:\frac{abc}{(c^2+a^2-b^2)R}\\&=\frac{1}{a^2+b^2-c^2}:\frac{1}{b^2+c^2-a^2}:\frac{1}{c^2+a^2-b^2}.\end{aligned}$$

將比值各項同乘以 $(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$, 即得

$$\begin{aligned}&\tan C:\tan A:\tan B\\&\quad=[c^4-(a^2-b^2)^2]:[a^4-(b^2-c^2)^2]:[b^4-(c^2-a^2)^2]\\&\quad=(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4):(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4):(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH\\&\quad=(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4):(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4):(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4).\end{aligned}$$

四、發現公式 揭示本質

在證明公式 $(*)$ 的過程中, 我們發現兩個重要的等式:

$$\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=\tan C:\tan A:\tan B \tag{**}$$

$$\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=\frac{1}{a^2+b^2-c^2}:\frac{1}{b^2+c^2-a^2}:\frac{1}{c^2+a^2-b^2} \tag{***}$$

我們把這兩個等式也作爲銳角三角形的「邊垂三角形」面積比公式。這兩個公式對稱、和諧。其中公式 $(**)$ 與正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=2R$ 類似, 也可以寫成

$$\frac{\triangle ABH}{\tan C}=\frac{\triangle BCH}{\tan A}=\frac{\triangle CAH}{\tan B}=2R^2\cos A\cos B\cos C$$

的形式, 這可以作爲公式 $(**)$ 的變形公式。公式 $(**)$ 表明銳角三角形的「邊垂三角形」面積之比等於與之對應的三個內角的正切之比, 也就是說這個比值僅與銳角三角形的內角大小有關, 直接揭示了銳角三角形的「邊垂三角形」面積比本質。

公式 $(***)$ 表明銳角三角形的「邊垂三角形」面積之比等於與之對應的邊的平方與另兩邊的平方和之差的負倒數之比。表面上看公式 $(***)$ 只是公式 $(*)$ 的一個簡單變形, 但公式 $(***)$ 同公式 $(*)$ 相比, 更能揭示問題的本質。另外在應用公式 $(***)$ 解答原例題時, 尤爲簡捷。

五、應用公式 再解例題

學習數學的目的是爲了應用, 其中應用所學的公式或者一些比較經典的數學結論解決數學問題是數學應用的一個具體體現。下面我們來用公式 $(**)$ 和公式 $(***)$ 解答原文中的例題, 再次感悟應用數學公式給解決數學問題帶來的便捷。

由 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=1:2:3$, 根據公式 $(**)$, 得 $\tan C:\tan A:\tan B=1:2:3$。設 $\tan C=k$, $\tan A=2k$, $\tan B=3k$。由於 $A+B+C=180^\circ$, 可得 $\tan C+\tan A+\tan B=\tan C\tan A\tan B$。$\therefore\ k+2k+3k=k\cdot 2k\cdot 3k$。解

得 $k=1$ (負值和零捨去)。$\therefore\ \tan C=1$, $\tan A=2$, $\tan B=3$。進一步可以求出 $\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin A=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin B=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$。$\therefore\ a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\dfrac{2}{\sqrt{5}}:\dfrac{3}{\sqrt{10}}:\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{8}:3:\sqrt{5}$。或者由 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=1:2:3$, 根據公式 $(***)$, 得 $\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}:\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}:\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}=1:2:3$。進一步可得 $a^2+b^2-c^2=2(b^2+c^2-a^2)$, $a^2+b^2-c^2=3(c^2+a^2-b^2)$。以上兩式聯立, 得 $a^2=\dfrac{8}{5}c^2$, $b^2=\dfrac{9}{5}c^2$。$\therefore\ a^2:b^2:c^2=\dfrac{8}{5}:\dfrac{9}{5}:1=8:9:5$。$\therefore\ a:b:c=\sqrt{8}:3:\sqrt{5}$。

可以看出, 應用公式 $(**)$ 和公式 $(***)$ 解答原文中的例題確實簡便, 提高了解題效率, 尤其以公式 $(***)$ 解答最爲簡捷。

六、對照數據 進行反思

本文中的例題實際是數學傳播第 30 卷 2 期劉俊傑先生的文章《換個觀點看三角形的四心》中的第三個例題。劉先生在解答此例題之前寫道:「接下來的是本文中的一個主要題目, 是我很喜歡的一個例題。」爲什麼劉先生非常喜歡這個題目, 我們不得而知。但我想最主要的原因還是因爲題目中的數字 1, 2, 3比較特殊。首先這三個數是連續正整數, 而且這三個數的和等於它們的積。滿足「三個連續正整數之和等於它們之積」的三個數只有 1, 2, 3。另外由 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=1:2:3$, 假設 $\triangle ABH=1$, $\triangle BCH=2$, $\triangle CAH=3$, 那麼 $\triangle ABH+\triangle BCH+\triangle CAH=\triangle ABH\cdot\triangle BCH\cdot\triangle CAH$, 即此時銳角 $\triangle ABC$ 的「邊垂三角形」面積之和等於它們的積。考慮到 $\triangle ABH:\triangle BCH:\triangle CAH=\tan C:\tan A:\tan B$ 和 $\tan C+\tan A+\tan B=\tan C\tan A\tan B$, 那麼是不是任意銳角 $\triangle ABC$ 的「邊垂三角形」面積之和都等於它們的積呢? 讓我們一起來探討這個問題。首先設 $\triangle ABH=k\tan C$, $\triangle BCH=k\tan A$, $\triangle CAH=k\tan B$。令 $\triangle ABH+\triangle BCH+\triangle CAH=\triangle ABH\cdot\triangle BCH\cdot\triangle CAH$, 得 $k\tan C+k\tan A+k\tan B=k\tan C\cdot k\tan A\cdot k\tan B$, 即 $k(\tan C+\tan A+\tan B)=k^3\tan C\tan A\tan B$。由於 $\tan C+\tan A+\tan B=\tan C\tan A\tan B$, 且 k 爲正數, $\therefore\ k^2=1$。$\therefore\ k=1$。此時 $\triangle ABH=\tan C$, $\triangle BCH=\tan A$, $\triangle CAH=\tan B$。顯然當 $\triangle ABH=\tan C$ (或 $\triangle BCH=\tan A$ 或 $\triangle CAH=\tan B$) 時, 銳角 $\triangle ABC$ 的「邊垂三角形」面積之和等於它們的面積之積。也就是說當銳角 $\triangle ABC$ 的「邊垂三角形」面積等於與之對應的三個內角的正切時, 三個「邊垂三角形」面積之和等於它們的積。

那麼當銳角 $\triangle ABC$ 的「邊垂三角形」面積之和等於它們的積時, 銳角 $\triangle ABC$ 應該滿足什麼條件呢? 下面我們對這個問題進行探討。

設銳角 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑爲 R, 則

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 2R\sin C\cdot 2R\sin B\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C.$

當 $\triangle ABH+\triangle BCH+\triangle CAH=\triangle ABH\cdot\triangle BCH\cdot\triangle CAH$ 時,

$\triangle ABH=\tan C$, $\triangle BCH=\tan A$, $\triangle CAH=\tan B$。

$\therefore\ 2R^2\sin A\sin B\sin C=\tan A\tan B\tan C$。

即 $2R^2\sin A\sin B\sin C=\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}\cdot\dfrac{\sin C}{\cos C}$。整理, 得 $2R^2\cos A\cos B\cos C=1$。

當然, 這個結論也可根據公式 $(**)$ 的變形公式

$\dfrac{\triangle ABH}{\tan C}=\dfrac{\triangle BCH}{\tan A}=\dfrac{\triangle CAH}{\tan B}=2R^2\cos A\cos B\cos C$ 快速得到。

另外, 由於 $\triangle ABH=2R^2\sin C\cos A\cos B$, $\triangle BCH=2R^2\sin A\cos B\cos C$,

$\triangle CAH=2R^2\sin B\cos A\cos C$, 因此也可根據 $2R^2\sin C\cos A\cos B=\tan C$

(或 $2R^2\sin A\cos B\cos C=\tan A$ 或 $2R^2\sin B\cos A\cos C=\tan B$) 得到。

由均值不等式, 得 $\cos A\cos B\cos C\le\Big(\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\Big)^3$。

當 $\cos A=\cos B=\cos C$ 時, 等號成立, 此時 $A=B=C=60^\circ$,

$$\cos A\cos B\cos C\le\Big(\frac{\cos 60^\circ+\cos 60^\circ+\cos 60^\circ}{3}\Big)^3=\frac{1}{8}.$$

$\therefore\ \cos A\cos B\cos C=\dfrac{1}{2R^2}\le\dfrac{1}{8}$。即 $2R^2\ge 8$, $R^2\ge 4$。$\therefore\ R\ge 2$。

所以當銳角 $\triangle ABC$ 滿足「$2R^2\cos A\cos B\cos C=1$ (其中 $R\ge 2$)」時, 銳角 $\triangle ABC$ 的「邊垂三角形」面積之和等於其面積之積。這個結論是由趙國瑞首先發現的, 我們把這樣的三角形叫做「趙國瑞三角形」。

如圖 4, 在銳角 $\triangle ABC$ 中, $AB=3\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{10}$, $BC=4$, H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 可以算出 $\triangle ABH=3$, $\triangle BCH=2$, $\triangle CAH=1$, 而 $1+2+3=1\times 2\times 3$, 因而有 $\triangle ABH+\triangle BCH+\triangle CAH=\triangle ABH\cdot\triangle BCH\cdot\triangle CAH$ (其中 $\triangle CAH=\tan B=1$, $\triangle BCH=\tan A=2$, $\triangle ABH=\tan C=3$)。

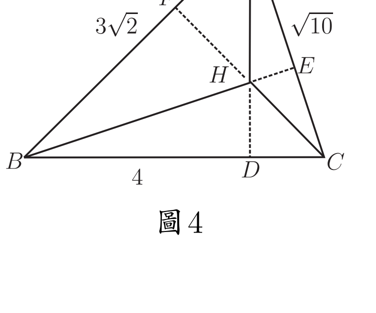

圖4

再如圖 5, 在等邊 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$, H 爲銳角 $\triangle ABC$ 的垂心, 可以算出 $\triangle ABH = \triangle BCH = \triangle CAH = \sqrt{3}$, 而 $\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3} = \sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$, 因而有 $\triangle ABH + \triangle BCH + \triangle CAH = \triangle ABH\cdot\triangle BCH\cdot\triangle CAH$ (其中 $\triangle ABH = \triangle BCH = \triangle CAH = \tan A = \tan B = \tan C = \sqrt{3}$)。

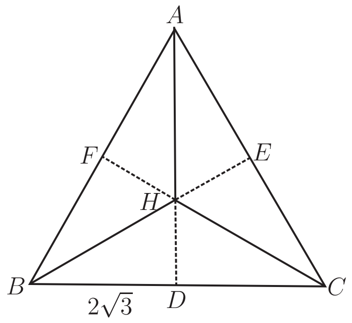

圖 5

因此, 圖 4 和圖 5 中的銳角 $\triangle ABC$ 都是「趙國瑞三角形」。其中圖 5 中的銳角 $\triangle ABC$ 是外接圓半徑最短的「趙國瑞三角形」, 而圖 4 中的銳角 $\triangle ABC$ 是唯一一個「邊垂三角形」面積呈連續正整數的「趙國瑞三角形」。

不難發現,「趙國瑞三角形」具有下面兩個性質:

性質一「趙國瑞三角形」的面積等於其三個「邊垂三角形」面積之積;
性質二「趙國瑞三角形」的「邊垂三角形」面積等於與之對應的三角形的內角的正切。

通過進一步深入分析我們再次發現: 如果視三個「邊垂三角形」的面積 $\triangle ABH$、$\triangle BCH$ 和 $\triangle CAH$ 爲未知量,「趙國瑞三角形」的本質實際是三元三次不定方程 $x+y+z=xyz$ 的正數解 ($x=\tan A$, $y=\tan B$, $z=\tan C$, 且 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 是銳角 $\triangle ABC$ 的三個內角) 的幾何解釋。

七、有始有終 文末小結

本文主要應用不同於文 [1] 作者的方法再次證明了銳角三角形的「邊垂三角形」面積比公式 $(*)$。在證明公式 $(*)$ 的過程中, 我們又發現了公式 $(**)$ 和公式 $(***)$, 這是我們在證明公式 $(*)$ 過程中的最大收穫。其中公式 $(**)$ 是從「三角形的角」這個角度揭示問題的本質, 公式 $(***)$ 是從「三角形的邊」這個角度揭示問題的本質。當然, 公式 $(**)$ 同公式 $(***)$ 相比, 更能揭示問題的本質, 畢竟銳角三角形的「邊垂三角形」面積比是一個比值, 與三角形的邊的長短沒有關係, 僅與三角形的內角的大小有直接關係。事實上, 公式 $(**)$ 直接揭示了問題的本質, 而應用公式 $(***)$ 解答一類由銳角三角形的「邊垂三角形」面積比求銳角三角形的三邊之比問題十分簡捷, 因此這兩個公式各有千秋。

另外, 劉俊傑先生在《數學傳播》第 30 卷 2 期中的文章《換個觀點看三角形的四心》談到了三角形的四心: 重心、內心、外心及垂心。筆者認爲三角形的四心中, 重心、內心和垂心聯繫最爲密切, 原因在於, 這三心都是經過三角形的頂點及該頂點所對的邊的線段的交點, 外心則不然。同一銳角三角形同一條邊上的高、角平分線和中線

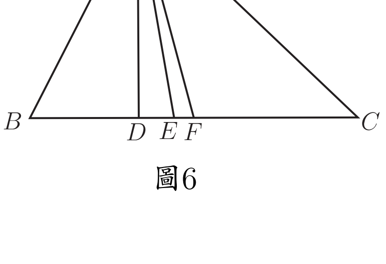

圖6

的位置關係如圖 6 所示, 其中 AD、AE、AF 分別是銳角 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上的高、角平分線和中線。可以看出, 角平分線位於高和中線之間。不僅位置具有這種關係, 而且長短也有這種關係, 即 $AD < AE < AF$。這種關係也反映了銳角三角形的重心、內心和垂心之間的聯繫。

這種聯繫還可以通過銳角三角形的某心到三邊的距離之比體現。如圖 7, 設點 O 爲銳角 $\triangle ABC$ 的內部一點, 點 O 到三邊的距離分別爲 OD、OE、OF。可以證明:

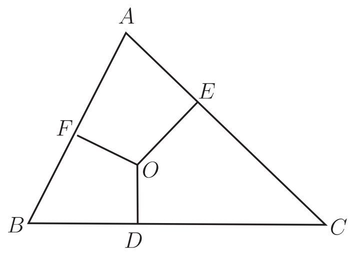

圖7

當點 O 爲三角形的垂心時,

$$OD:OE:OF=\cos A^{-1}:\cos B^{-1}:\cos C^{-1};$$

當點 O 爲三角形的內心時, $OD:OE:OF=1:1:1$

$$(或\ (\cos A)^0:(\cos B)^0:(\cos C)^0\ 或\ (\sin A)^0:(\sin B)^0:(\sin C)^0);$$

當點 O 爲三角形的重心時, $OD:OE:OF=\sin A^{-1}:\sin B^{-1}:\sin C^{-1}$。

這個比值是不是正好體現了重心、內心和垂心之間的聯繫。

學習數學, 我們一定要善於思考, 勇於探索, 力爭練就一雙「火眼金睛」, 將數學問題「看透」、「看破」, 努力嘗試揭示數學問題的本質。

参考文獻

1. 連威翔。一道面積比公式的另證。數學傳播季刊, 42(1), 80-84, 2018。
2. 劉俊傑。換個觀點看三角形的四心。數學傳播季刊, 30(2), 28-39, 2006。

—本文作者任教中國湖北省襄陽市襄州區黃集鎮初級中學—